Skúmanie v školskej matematike -
Magický štvorec a mobilný telefón

Leonard Frobisher, Jan Kopka, Marián Trenkler

Abstract:

Investigation is not only a method for a teacher to use in teaching mathematics, but also for a student to use in learning the subject. We show how to construct a magic square using the numbers on a cellular phone with the help of investigation. We then consider how the same problem can be approached in the early years of elementary school giving rise to many related problems.

V roku 2005 vydala Univerzita J.E.Purkyňe v Ústí n.Labem knihu Jana Kopku *Výskumný přincíp při výuce matematiky.* Profesor Petr Vopěnka v úvode knihy napísal: *Před didaktikou matematiky stojí naléhavý úkol nalézt novou látku, na níž by bylo možno provádět výcvik vyšší operability, která by umožňovala zachovat vše, co poskytovala látka tradiční a rozvíjela ji způsobem odpovídajícím moderní době.*

Kniha obsahuje dôležité stratégie, pomocou ktorých je možné riešiť matematické problémy, pričom pozornosť je samozrejme venovaná aj tzv. výskumným stratégiám. V knihe je aj mnoho problémov a matematických situácií, ktoré možno zvládnuť pomocou skúmania. Problematika je spracovaná tak, aby učiteľ mohol zvolené časti knihy použiť priamo vo vyučovaní. Skúmanie, ako je uvádzané v knihe, je metóda pomocou ktorej možno matematiku vyučovať (toto sa týka učiteľov), ako aj metóda, pomocou ktorej sa matematiku možno učiť (týka sa to žiakov a študentov). Výskumný princíp umožňuje žiakom prenikať hlbšie do tajov matematiky ako to umožňujú klasické metódy. Pritom táto cesta je pre nich omnoho zaujímavejšia.

V tomto príspevku podrobnejšie rozoberieme jeden zaujímavý problém, ktorého riešenie môže podnietiť žiakov ku skúmaniu vo vyučovaní matematiky. Tento problém je vhodný pre mladších žiakov, je však možné ho využiť aj na strednej škole (samozrejme záleží len na spôsobe podania.)

Už mnoho storočí magické štvorce fascinujú nielen matematikov, ale aj mnoho iných ľudí. Predmetom matematických štúdií (v dnešnom chápaní tohto pojmu) sa magické štvorce stali v 17-tom storočí. Na internetových stránkach čitateľ môže nájsť tisíce odkazov na magické štvorce a problémy s nimi súvisiace. Viaceré z nich sú riešiteľné aj žiakmi základných a stredných škôl. V tomto príspevku uvádzame jednoduchú úlohu, ktorej riešenie vyžaduje len znalosti o rozklade malých prirodzených čísel na súčet troch prirodzených čísel. Táto úloha sa dá využiť vo vyučovaní detí základným

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obrázok 1: Časť klávesnice telefónu

operáciám s prirodzenými číslami, pri ich precvičovaní a inšpirovať ich k formulovaniu a riešeniu zložitejších úloh, napríklad o magických štvorcoch.

Deväť prirodzených čísel na tlačidlách klávesnice mobilného telefónu je zoradených do štvorcovej tabuľky. (Pozri obrázok 1.) Toto nás uvádza do problematiky nasledujúcimi otázkami:

Aký je súčet troch čísel, ktoré sú
- *v druhom stĺpci?*
- *v druhom riadku?*
- *na uhlopriečkach?*

Ľahko zistíme, že tieto štyri súčty sú rovné číslu 15 a súčty troch čísel v ostatných riadkoch a stĺpcoch sú rôzne od 15.

Problém 1: Pokúsme sa premiestniť tlačidlá s číslami $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby súčet troch čísel v každom riadku, v každom stĺpci a aj oboch uhlopriečkach bol rovný 15.

Štvorcová tabuľka čísel 3×3, ktorá sa skladá z čísel $1, 2, \ldots, 9$, pričom súčet troch čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj oboch uhlopriečkach je rovnaký sa nazýva *magický štvorec.* Tento súčet sa nazýva *magické číslo* a v našom prípade sa rovná 15.

Skúmanie problému:

• Začnime náhodným vkladaním čísel 1 až 9 do tabuľky, ktorá sa skladá z 3×3 štvorčekov. Takéto experimentovanie zvyčajne nevedie k vyriešeniu problému. Tento prístup sa nazýva *metóda pokusu a omylu.* Je to metóda, ktorú učitelia matematiky zvyčajne na hodinách netrénujú. Toto je však škoda, lebo takýto prístup je veľmi užitočný v prírodných aj technických vedách.

• Efektívnejším a vhodnejším prístupom je metóda korekcie omylov, ktorá dáva nadhľad nad problémom a zvyšuje pravdepodobnosť nájdenia riešenia. Tento prístup sa nazýva *metóda pokusu a spresnenia.* Pri tejto metóde už začíname využívať objavené vzťahy k tomu, aby sme rýchlejšie dospeli k riešeniu.

Obe uvedené stratégie môžu, ale nemusia viesť k nájdeniu riešenia problému, ale rozhodne vedú k lepšiemu pochopeniu problému a inšpirujú k hľadaniu rôznych ďalších stratégií. Jedna z takých stratégií vedie k otázke, či je možné zostrojiť z čísel $1, 2, \ldots, 9$ magický štvorec a aké by bolo jeho magické číslo? Niektoré deti môžu položiť otázku, či môže existovať viacero magických čísel magického štvorca vytvoreného z čísel 1 až 9. (Musíme byť pozorní, lebo to čo je nám zrejmé nemusí byť zrejmé aj deťom.)

Nasledujúce dve otázky vedú deti k odpovedi na vyššie uvedený problém:

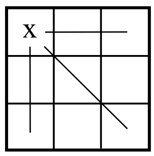
- *Čomu sa rovná súčet čísel* 1 *až* 9? $(1 + 2 + \cdots + 9 = 45)$
- *Ak rozdelíme deväť čísel do troch riadkov (alebo troch stĺpcov) s rovnakým súčtom, tak aký je súčet čísel v každom riadku*? $(45 : 3 = 15)$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že ak magický štvorec existuje, tak jeho magické číslo musí byť 15.

Teraz sme už v situácii, že začíname skúmať, kde sa čísla od 1 do 9 môžu nachádzať v tabuľke zloženej z 3×3 štvorčekov. Niekedy je potrebné viesť deti pomocou otázok k spôsobu skúmania. V priebehu práce môžeme klásť predovšetkým také otázky, ktoré pri skúmaní vedú žiaka vhodným smerom.

- *Ktoré čísla musia byť v rohových štvorčekoch magického štvorca*?
- *Ktoré čísla musia byť v stredných štvorčekoch pozdĺž strán štvorca*?
- *Ktoré číslo musí byť v strednom štvorčeku*?

Zaoberajme sa prvou otázkou. Číslo, ktoré je v rohovom štvorčeku sa musí nachádzať aspoň v troch trojiciach čísel. Jedna trojica je v riadku, druhá v stĺpci a tretia na uhlopriečke tak, ako je to nakreslené na obrázku 2. Magické číslo v našom prípade je 15. Preto musíme nájsť všetky možné rozklady čísla 15 na súčet troch čísel vybraných z čísel $1, 2, 3, \ldots, 9$.



Obrázok 2: Umiestnenie čísla v rohu

Číslo 1 sa nachádza len v dvoch rozkladoch

$$15 = 1 + 5 + 9,$$
$$15 = 1 + 6 + 8.$$

Ukázali sme, že číslo môže byť v rohu tabuľky len vtedy, ak sa nachádza aspoň v troch rozkladoch. Toto nie je splnené pre číslo 1, lebo je len v dvoch rozkladoch. Číslo 1 sa nemôže nachádzať v rohovom štvorčeku. Pretože číslo, ktoré sa nachádza v strede strany (presnejšie v strede trojice čísel, ktorá je v prvom alebo treťom riadku alebo stĺpci) musí byť len v jednom riadku a jednom stĺpci (dvoch rozkladoch), číslo 1 môže byť v strednom štvorčeku jednej zo strán.

Ak číslo 2 je jedným z čísel troch trojíc, tak dostávame tri rozklady obsahujúce číslo 2.

$$15 = 2 + 4 + 9,$$
$$15 = 2 + 5 + 8,$$
$$15 = 2 + 6 + 7.$$

Pretože číslo v rohu sa nachádza v jednom riadku, jednom stĺpci a jednej uhlopriečke, tak číslo 2 môže byť umiestnené v rohovom štvorčeku tabuľky. Len číslo 5 sa nachádza v štyroch rozkladoch na trojice čísel

$$15 = 5 + 1 + 9,$$
$$15 = 5 + 2 + 8,$$
$$15 = 5 + 3 + 7,$$
$$15 = 5 + 4 + 6.$$

Číslo, ktoré sa nachádza v strede tabuľky musí patriť jednému riadku, jednému stĺpcu a dvom uhlopriečkam. Z toho vyplýva, že v strede musí byť číslo 5. Opakovaným rozkladom na trojice čísel obsahujúce čísla $3, 4, 5, \ldots, 9$ dostávame, že

- čísla $2, 4, 6, 8$ musia byť v rohových políčkach,
- čísla $1, 3, 7, 9$ musia byť v stredných políčkach strán,
- číslo 5 musí byť v strede štvorca.

Teraz vložme všetky čísla od 1 do 9 do políčok tabuľky 3×3 tak, aby boli splnené tieto podmienky a vypočítajme súčet čísel v každom riadku, v každom stĺpci a aj oboch uhlopriečkach. Ak všetky súčty sú rovnaké, tak sme zostrojili magický štvorec. Ak tomu tak nie je, tak po niekoľkých pokusoch s touto stratégiou pravdepodobne dostaneme magický štvorec. Opäť sme si precvičili metódu experimentovania, ale veľmi uľahčenú vyššie uvedenými objavmi. Na obrázku 3 je jeden z možných prípadov magického štvorca. Skontrolujte, či je tomu naozaj tak.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Obrázok 3: Magický štvorec

Otázka: Môžeme nájsť aj iné riešenie?
Odpoveď: Každý štvorec je súmerný podľa štyroch priamok. Priamkami sú určené štyri osové súmernosti a štyri otáčania, pokiaľ medzi ne počítame aj identitu (každé otáčanie vznikne zložením dvoch osových súmerností), ktoré zobrazujú štvorec do seba. Pretože štvorec ponechávajú na mieste (reprodukujú) štyri osové súmernosti a štyri otáčania (vrátane identity) môžeme zostrojiť ďalších sedem magických štvorcov použitím osových súmerností a otáčaní. Ponechávame na čitateľa, či týchto 8 riešení bude považovať za rovnaké alebo za rôzne? Ako by sme v tomto prípade definovali pojem *rovnaké štvorce.*

Úloha 1: Aký je najmenší počet tlačidiel, ktoré musíme na klávesnici vymeniť, aby sme dostali klávesnicu, ktorá je magickým štvorcom (obrázok 3)?
Odpoveď: Len tlačidlo s číslom 5 môže ostať na svojom pôvodnom mieste a všetky ostatné tlačidla musia byť vymenené.

Úloha 2: Majme danú štvorcovú tabuľku 3×3 a v jej strede číslo 5. Aký je najmenší počet čísel, ktoré jednoznačne určujú magický štvorec?
Odpoveď: Po niekoľkých experimentoch môžeme objaviť, že potrebujeme poznať umiestnenie aspoň dvoch ďalších čísel spĺňajúce nasledujúce podmienky:

1. párne čísla môžu byť v rohových políčkach a nepárne čísla $1, 3, 7, 9$ môžu byť len v stredných políčkach na stranách štvorca;
2. súčet týchto dvoch čísel sa nerovná 10. (V ktorých prípadoch je súčet dvoch čísel v magickom štvorci rovný 10?)

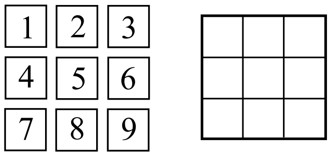
Poznámka: Aj keď umiestnenie tlačidiel v tvare magického štvorca je zaujímavé, tak nie je však praktické!

Náš pôvodný problém môžeme modifikovať a sformulovať niektoré variácie pôvodnej úlohy. Napríklad:
- zvoľme čísla od 2 do 10,
- zvoľme 9 párnych čísel alebo
- zvoľme 9 prvočísel.

Čo si myslíte, pre ktorú z týchto skupín čísel môžete zoradiť do tabuľky 3×3, ktorá je magický štvorec? V tomto prípade však musíme upraviť definíciu magického štvorca. Musíme vynechať podmienku, že magický štvorec obsahuje čísla $1, 2, \ldots, 9$. Aké sú nutné a postačujúce podmienky k tomu, aby z uvažovanej množiny deviatich čísel sa dal vytvoriť magický štvorec?

Pozrime sa na možnosti, ako môže skúmanie inicializovať deti k hľadaniu nových problémov, ktorých riešenie je možné hľadať metódou skúmania.

Deti v prvých ročníkoch základnej školy môžu pomocou kartičiek s číslami od 1 do 9 dávať ich do tabuľky 3×3 a metódou pokusu a omylu sa snažiť o vytvorenie magického štvorca. K tomu potrebujú tabuľku a deväť kartičiek s číslami, ktoré sú nakreslené na obrázku 4.



Obrázok 4: Kartičky s číslami

Takáto pomôcka môže pomôcť vkladať kartičky do jednotlivých políčok a odpovedá mentálnej úrovni detí mladšieho školského veku. Nadväzuje na detské hry a takto navádza atmosféru voľnosti. Ostáva otázka záznamu získaných poznatkov. Na toto môže slúžiť pomôcka nakreslená na obrázku 5. Pozrime sa na variácie problému 1 tak, že nebudeme sledovať či je súčet v riadkoch, stĺpcoch aj uhlopriečkach 15. Namiesto toho sledujeme, ako deti ukladajú kartičky s číslami do tabuľky. Naším cieľom je to, aby deti vytvorili magický štvorec s magickým číslom 15. V ďalšej časti ukážeme cestu k tomuto cieľu.

Problém 2: Vlož 9 kartičiek do tabuľky podľa tebou zvolených pravidiel.

Každému dieťaťu, ktoré vyriešilo úlohu môžeme dať nasledujúce otázky:

- Kto má v tabuľke riadok (stĺpec alebo uhlopriečku), v ktorom má trojica najväčší súčet čísel?
- Má niekto v tabuľke dva riadky (stĺpce alebo uhlopriečky), v ktorých je rovnaký súčet trojíc čísel?

Toto uvádza nasledujúce problémy, ktoré môžu viesť deti k formulovaniu a skúmaniu vlastných a zložitejších problémov.

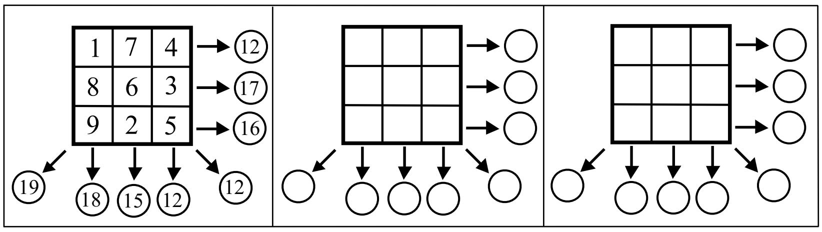
Problém 3: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby v dvoch riadkoch (stĺpcoch alebo oboch uhlopriečkach) si mal rovnaké súčty čísel.

Problém 4: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby vo všetkých riadkoch (stĺpcoch) si mal rovnaké súčty čísel.

Problém 5: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby vo všetkých riadkoch, všetkých stĺpcoch aj oboch diagonálach si mal rovnaké súčty čísel.
Riešením piateho problému je hľadaný magický štvorec, toto je dosiahnuté bez konštatovania, že tento súčet je 15.

Pre prácu nad problémami 2 až 5 deti potrebujú tabuľku s kartičkami s číslami. Takáto tabuľka, ako sme už uviedli vyššie, je na obrázku 5, do ktorej si deti môžu zapisovať súčty čísel a teda výsledky experimentovania.

V celom skúmaní si deti kladú otázky, formulujú nové problémy. Pri tomto im môže učiteľ dávať rôzne námety, prípadne ich nachádzať vo vhodnej



Obrázok 5: Tabuľky na experimentovanie

knihe. Musíme však sledovať a usmerňovať prácu žiakov. Učiteľ pracuje so žiakmi individuálne.

Problém 6: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby vo všetkých riadkoch (stĺpcoch) si mal rovnaké súčty čísel.

Problém 7: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby súčty čísel v riadkoch, stĺpcoch a oboch uhlopriečkach boli navzájom rôzne.

Problém 8: Vlož kartičky do tabuľky tak, aby osem súčtov trojíc čísel v riadkoch, stĺpcoch a oboch uhlopriečkach tvorilo postupnosť čísel. (Ako deti pochopia tento pojem?)

Ak by sme položili otázku *Aký je najmenší počet tlačidiel, ktoré musíme vymeniť na klávesnici tak, aby sme dostali magickú klávesnicu*, tak odpoveď by bola že všetky, okrem tlačítka s číslom 5. V skúmaní však môžeme pokračovať nasledujúcou otázkou:

Problém 9: Aký je najmenší počet čísel v tabuľke (a na ktorých miestach v tabuľke musia byť umiestnené), ktoré jednoznačne určujú ostatných čísla tak, aby vznikol magický štvorec?

Nadané deti experimentovaním pravdepodobne dôjdu k poznatku, že ak sú v tabuľke vhodne (ako?) dané dve čísla, tak poloha ostatných je jednoznačne určená. Odtiaľ je už len krok k dôkazu faktu, že existuje len osem magických štvorcov.

V matematike pod pojmom magický štvorec rádu n rozumieme štvorcovú tabuľku $n \times n$, ktorá obsahuje z prirodzených čísel $1, 2, \ldots, n^2$, ktoré sú rozmiestnené tak, že ich súčet v každom riadku, v každom stĺpci a oboch diagonálach je rovnaký. V tomto príspevku pojmom magický štvorec rozumieme len tabuľku 3×3, ktorá obsahuje 9 čísel. Magické štvorce majú bohatú históriu (pozri [2], [4] a [5]) a v dnešnej dobe nachádzajú rôzne aplikácie.

Mnoho zaujímavých informácií sa nachádza na internetových stránkach venovaným *magickým štvorcom* (anglicky *magic squares*.) Toto vytvára predpoklady k tomu, aby učiteľ spestril vyučovanie rôznymi faktami a historickými poznámkami. Zaujímavým spestrením vyučovania môže byť aj úryvok o Saturnových tabuľkách z knihy Cornelia Agrippu z Nettesheimu *Okultní filosofie* II. (Pozri [7], str. 27.)

Štúdium nových matematických teórií má často experimentálnu aj intuitívnu povahu. Výskum často začína experimentovaním na malej skupine objektov, nasledujú pokusy o zovšeobecňovanie a neskôr aj exaktný dôkaz získaných tvrdení. Štúdium sa robí metódou experimentovania a až po fáze skúmania získava rodiaca sa teória deduktívny charakter.

Ak chceme, aby žiaci získavali poznatky experimentovaním, tak im musíme vytvoriť inšpiratívne prostredie. Zrejme nie každý žiak dotiahne svoje skúmanie k predpokladanému cieľu, ale aj takto získa nový pohľad na matematiku.

Ak sa žiaci naučia získavať nové matematické poznatky metódou skúmania, tak sa naučia získavať nové vedomosti a porozumenie pre ne v budúcnosti. Môžu si osvojiť základy práce, ktorou nielen matematici získavajú nové poznatky.

Doplňme ešte, že ,,rovinná problematika" magických štvorcov môže byť prenesená do trojrozmerného priestoru. V tomto prípade hovoríme o magických kockách. *Magická kocka* je trojrozmerná tabuľka pozostávajúca z $3 \times 3 \times 3$ malých kociek, v ktorých sú čísla $1, 2, \ldots, 27$ umiestnené tak, že súčty čísel v každom riadku, stĺpci, tráme a štyroch telesových uhlopriečkach sú rovnaké. (Pozri nasledujúcu tabuľku, kde sú uvedené tri vrstvy magickej kocky.) Viac informácií čitateľ nájde v práci [4].

18	23	1		20	7	15		4	12	26
22	3	17		9	14	19		11	25	6
2	16	24		13	21	8		27	5	10

Obrázok 6: Tri vrstvy magickej kocky

Ak žiaci zvládli problematiku magického štvorca, tak môžu skúmať analogické problémy súvisiace s magickou kockou. Ku skúmaniu môžu žiaci využiť aj počítač a bádanie preniesť aj do oblasti informatiky.

Námety na otázky ku skúmaniu:

- Aké je magické číslo magickej kocky?
- Musí byť v strede kocky číslo 14?
- Existujú aj iné trojice čísel ležiace na jednej ,,priamke", v ktorých je rovnaký súčet čísel? (Všimnite si trojice čísel, ktoré obsahujú číslo 14.)
- Umiestnenie koľkých čísel stačí poznať na to, aby umiestnenie ostatných bolo jednoznačne určené?

Poznámka: Existujú štyri navzájom rôzne (neizomorfné) magické kocky. Navyše, každá kocka má deväť rovín súmerností, ktoré generujú 48 zhodností ponechávajúcich kocku na mieste. Celkovo existuje (podľa toho, čo považujeme za rôzne magické kocky) 4 alebo 192 rôznych magických kociek.

V práci [6] je uvedená konštrukcia magických hyperkociek v priestoroch ľubovoľného rozmeru. Analogické problémy môžeme sformulovať a riešiť aj v n-rozmerných priestoroch pre $n \geq 4$ a takto získať originálne matematické tvrdenia.

Práca vznikla s podporou grantovej agentúry KEGA.

Referencie

[1] A. Orton, L. Frobisher: *Insights into Teaching Mathematics*, London, Cassell 1996.

[2] V.Karpenko, *Tajemství magických čtverců*, Půdorys, Praha 1997

[3] J. Kopka: *Výskumný přincíp při výuce matematiky*, UJEP Ústí n.Labem 2005.

[4] I. Semanišinová, M. Trenkler: *O podivuhodnej korytnačke, magických štvorcoch a kockách*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 4/2000 (29), 21-34.

[5] I. Semanišinová: *Objavovanie čara magických štvorcov*, Disputationes Scientificae CU 4(2002), 86-92.

[6] M. Trenkler: *Konštrukcia magických p-rozmerných kociek*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 2/2000(29), 19-29.

[7] http://www.tenzor.cz/sempervivum/MAGIE/
AGRIPPA_VON_NETTESHEIM_-_Okultní_filosofie_II.pdf

Adresy autorov:

Leonard Frobisher
58 Buckstone Avenue, Leeds, England LS3 1LY
e-mail:ljfrobisher@btinternet.com

Jan Kopka
Přírodovědecka fakulta UJEP

České mládeže 8, 400 96 Ústí n.Labem
e-mail:kopkaj@sci.ujep.cz

Marián Trenkler
Katolícka univerzita
A.Hlinku 56, 034 01 Ružomberok
e-mail:trenkler@fedu.ku.sk